

广义相对论的起源

刘 生 余

(中国科学院自然科学史研究所)

爱因斯坦以其革命性的相对论著称于世。他创立广义相对论的过程,不同于其他新的物理理论产生的常规途径。广义相对论在很大程度上是爱因斯坦的独自发现,现成的物理认识的各种因素不曾对广义相对论提出紧迫的需要,除了马赫和黎曼的某些富有启发的思想外,还不存在广义相对论产生的任何具体的理论前提。为了创立广义相对论,爱因斯坦付出了十分艰巨的劳动。1933年,他在谈论广义相对论的起源时,有一段感人至深的话:“在黑暗中焦急地探索着的年代里,怀着热烈的希望,时而充满信心,时而精疲力竭,而最后终于看到了光明——所有这些,只有亲身经历过的人才能体会。”^[1]我们看到,广义相对论既是爱因斯坦非凡智慧的天才创造,又是他多年辛勤劳动的灿烂结晶。

追溯爱因斯坦殚精竭力创立广义相对论的过程,是一个引人入胜的题材。自七十年代以来,国外一些学者对这个问题作了许多探讨。本文以爱因斯坦1933年的《广义相对论的起源》一文为基本线索,试图阐述爱因斯坦探索广义相对论的主要思想和步骤,并通过对比当时一些著名物理学家对待相对论的态度,说明广义相对论主要是爱因斯坦的独自发现。本文仅仅是关于这个问题的初步尝试,作者力图根据自己看到的资料,整理出一些线索,以供进一步研究参考。

一、从狭义相对论到广义相对论的过渡 (1905—1907年)

1. 狭义相对论建立后的初期进展

1905年,爱因斯坦发表了题为《论动体的

电动力学》的论文,“用他的相对论发动了物理学中的一次思想革命”^[2]。爱因斯坦的相对论在起初的两三年间并没有得到充分注意。

相对论的完整大厦不是随着爱因斯坦的第一篇论文立即形成的。同年,爱因斯坦在上述论文的基础上推演出一个非常重要的结论:“物体的质量是它所含能量的量度;如果能量改变了 L ,那么质量也就相应地改变 $L/9 \times 10^{20}$ ”^[3]。1907年,爱因斯坦在《相对论原理及其结论》这篇综合性论文中,进一步阐明了 $E = mc^2$ 的完整意义。在发展相对论力学方面,普朗克作出了重要贡献。普朗克是相对论最早的支持者和传播者。1906年,他“根据新理论发现了取代牛顿质点运动方程的方程。”^[4]普朗克证明,运动方程能够借助引入拉格朗日函数 $L = -m_0 c^2 \cdot (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ 从最小作用量原理推出。但普朗克对狭义相对论的缺陷认识不足,在爱因斯坦开始探索广义相对论时,他曾对爱因斯坦说:“现在一切都能明白解释了,你为什么又忙于其他问题呢?”^[5]1907年,冯·劳厄用相对论运动学推导出菲涅耳曳引系数,并解释了菲索实验。前面提到的爱因斯坦1907年的论文,目的在于把相对性原理和洛伦兹理论相结合而开展的工作进行总结,他更进了一步,在文章的最后一部分中提出了广义相对论的物理基础。在其后八年的时间里,爱因斯坦不断发展这个基础,并最终创立了广义相对论。

理论和实验在1909年都取得了显著的进展。美国物理学家刘易斯和托尔曼用动量而不是用力作为基本概念,给出了相对论力学的坚实物理基础。他们在推导中使用了这样一个条件:物理定律在用洛伦兹变换从一个惯性系转换到另一个惯性系时形式保持不变。他们得出

这样的结论：只要用速度 v 和‘相对论质量’ m ($m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$) 来表示动量 p ($p = mv$)，就可以得到孤立系统动量守恒原理的确证。这样，我们不必依赖于电动力学，也可以得到建立相对论力学的根据。公式 $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 提供了借助于高速阴极射线在电场和磁场中偏转的实验来检验相对论的机会。同年，德国物理学家布赫勒证实了相对论公式的可靠性。明可夫斯基于 1908 年 9 月 21 日在科隆举行的第八十届德国自然科学家与医生大会上所作的题为《空间和时间》的著名讲演，也是发表于 1909 年。明可夫斯基的四维时空世界，给予相对论一个非常美妙的数学形式。起初爱因斯坦担心过于复杂的数学形式可能掩盖相对论的物理内容，对于明可夫斯基的“四维世界”显得有些冷漠。后来，他给明可夫斯基的重要贡献以极高的评价：“在明可夫斯基的研究之前，为了检验一条定律在洛伦兹变换下的不变性，人们就必须对它实行一次这样的变换；可是明可夫斯基却成功地引进了这样一种形式体系，使定律的数学形式本身就保证了它在洛伦兹变换下的不变性。”¹⁾ 爱因斯坦强调明可夫斯基的成就对于发展广义相对论的重要意义。他说：“没有这个观念，广义相对论恐怕就无法成长”²⁾。1911 年，劳厄写出了第一部关于狭义相对论的总结性论著。

狭义相对论给物理学带来了巨大的进步。对于它的成就，爱因斯坦作过这样的总结：“狭义相对论导致了对空间和时间物理概念的清楚理解，并且由此认识到运动着的量杆和时钟的行为。它在原则上取消了绝对同时性概念，从而也取消了牛顿所理解的那个即时超距作用概念。它指出，在处理同光速相比不是小到可忽略的运动时，运动定律必须加以怎样的修改。它导致了麦克斯韦电磁方程的形式上的澄清，特别是导致了对电场和磁场本质上同一性的理解。它把动量守恒和能量守恒这两条定律统一成一条定律，并且指出了质量同能量的等效性”³⁾ 对狭义相对论在物理家中的革命性作用，当时许多物理学家都还没有认识到。例如，除

爱因斯坦外，“没有一个物理学家在明可夫斯基以前谈论过空时观念的改变。”⁴⁾ 在相对论的发展上，狭义相对论和广义相对论是两个紧密联系的环节。从旧的机械自然观中完全解放出来，这是产生狭义相对论的基本条件。而对狭义相对论所开辟的道路和它的内在缺陷的清楚认识，又成为爱因斯坦朝着广义相对论攀登的出发点。

2. 狭义相对论的缺陷

从狭义相对论与广义相对论的连结来看，狭义相对论还存在着两个严重缺陷：(1) 狭义相对论承认惯性系的特殊地位。(2) 在狭义相对论的框架里不能建立令人满意的引力理论。这两个问题，当爱因斯坦还在伯尔尼的专利局任职时就充分注意到了。爱因斯坦最初是怎样着手这个问题的，目前还没有见到他留下来的文稿。但我们可以依据他以后发表的文章作一些分析。

爱因斯坦青年时代对哲学就有着浓厚的兴趣，他非常重视认识论问题。这种“哲学头脑和哲学眼光，使他比当时别的物理学家站得高、看得远、想得深，使他认识到有必要从认识论的角度，用批判的态度来重新考查物理学的许多传统的基本概念”⁵⁾。爱因斯坦在接受诺贝尔奖金的当天，曾作过题为《相对论的基本思想和问题》的报告，他这样总结了在相对论中起着主导作用两个方面：

“第一、全部研究的中心是这样一个问题：自然界中是否存在着物理学上看来是特殊的（特别优越的）运动状态？（物理学的相对论问题）。

第二、下面这个认识论的假设是基本性的：概念和判断只有当它们可以无歧义地同我们观测到的事实相比较时，才是有意义的（要求概念和判断是有内容的）。”⁶⁾

因此，对于狭义相对论的第一个缺陷，爱因

1) 见文献[1]p. 26.

2) 见文献[1]p. 458.

3) 见文献[1]p. 181.

斯坦在提出这个理论不久,就以一种近乎哲学的方式提了出来:“当我通过狭义相对论得到了一切所谓惯性系对于表示自然规律的等效性时(1905年),就自然地引起了这样的问题:坐标系有没有更进一步的等效性呢?换个提法:如果速度概念只能有相对的意义,难道我们还应当固执地把加速度当作一个绝对概念吗?”^[9]

在牛顿力学中,速度是相对量,加速度是绝对量。如果有人要问:“加速度相对什么而言呢?回答实际上很简单:相对于任何一个惯性系。然而,无论从物理学上还是从美学上来看,这个答案都是相当不能令人满意的。牛顿完全明白这一点,世界上究竟是什么东西,把惯性参照系从所有参照系中挑选出来作为无加速运动的标准?牛顿没能找到答案,因而假设了绝对空间的存在。”^[9]牛顿的理论虽然没能给惯性系的存在提供一个令人满意的答案,惯性系却在牛顿的理论中起着核心作用。因此,在这里狭义相对论和古典力学有着共同的基础。可以认为,狭义相对论只是清除了以洛伦兹静止以太形式出现的绝对空间,却同样不能为以牛顿惯性系形式出现的绝对空间提供任何解释。狭义相对论的四维空间象牛顿的空间一样地刚硬和绝对。

狭义相对论的另一个缺陷是不能自然地处理引力问题。当爱因斯坦刚开始处理引力问题时,他对这一点也并不是很清楚的。

狭义相对论的起源要归功于麦克斯韦的电磁场方程。麦克斯韦-洛伦兹电动力学已经通过支配光在真空中传播的定律,打破了即时作用这种信念。按照狭义相对论,在距离上分隔开的事件之间没有绝对同时性。因此,爱因斯坦也象当时其他物理学家一样,试图作出引力的场定律。这种在狭义相对论的框架里解决引力问题的尝试,“最简单的做法当然是保留拉普拉斯的引力标量势,并且用一个关于时间的微分项,以明显的方式来补足泊松方程,使狭义相对论得到满足。”^[2]在用场解释的古典力学中,引力势表现为一种标量场。引力场的这种标量理论,容易做到使洛伦兹变换群保持不变。但是,

当爱因斯坦力图在狭义相对论的框架里把引力表示出来的时候,他很快就察觉了其中的困难。1922年,爱因斯坦在日本京都大学作了题为《我是怎样创造相对论的》演讲,他回忆说:“1907年,当我正在写一篇关于狭义相对论的评述性文章时,……我认识到,除了引力定律以外的一切自然现象都能借助狭义相对论加以讨论。我非常想弄明白其后的原因……最使我不满意之点是,虽然惯性和能量之间的关系已经如此美妙地从狭义相对论中推导出来,但惯性和重力之间的关系却没能得到说明。我猜想这个关系是不能依靠狭义相对论来说明的。”^[10]后来,爱因斯坦在1946年所写的《自述》中又提到这个问题。他强调,一个自然的引力理论必须把下面两件事结合在一起:

“(1)根据狭义相对论的一般考虑,可以清楚地看到,物理体系的惯性质量随其总能量(因而,比如也随其动能)的增加而增加。

(2)根据很精确的实验(尤其是根据厄缶的扭秤实验),在经验上非常精确地知道,物体的引力质量同它的惯性质量是完全相等的。

……这条件可以极其自然地表述如下:在既定的重力场中,一个体系的降落加速度同这降落体系的本性(因而特别是同它的能量含量)无关。”^[11]

对上述狭义相对论的两个缺陷的清楚认识,可以说是创立广义相对论的先决条件。但这并不意味着,广义相对论是从在狭义相对论的框架中修改牛顿引力定律的各种企图的失败中生长起来的。

3. 洛伦兹协变引力理论

牛顿在1686年得出了任意两个物体之间的普遍引力定律。这是一种质点理论。引力场的思想是拉格朗日在1773年提出的。他引入引力势函数 $V(r_{ik})$, 其方向导数给出牛顿的引力。拉普拉斯在1782年详细地讨论了势函数

1) 见文献[2] p. 319.

2) 见文献[1] p. 320.

3) 见文献[2] p. 29.

V 的基本微分方程(拉普拉斯方程):

$$\Delta^2 V = 0.$$

1813年,泊松推广了引力场理论,引进了后来以他的名字命名的方程:

$$\nabla^2 V = 4\pi G\rho.$$

虽然作了这种推广,牛顿引力理论的重要特征并没有改变,它不显含时间,引力仍然是一种即时作用。

在引力领域内也早就出现了用牛顿的理论不能解释的问题。勒米里埃在预言海王星的前一年就算出,水星近日点的进动比预期值每百年快 $35''$ 。这个差异在1882年由S.纽科姆再次证实,他得出水星近日点多余的进动值为每百年 $43''$ 。纽科姆接着提出自己的解释,但未获成功。他因此在1895年放弃这些不满意的探索,而宁愿暂时假定太阳的引力并不严格地遵守平方反比定律。

牛顿的引力定律由于不能圆满地解释水星近日点的进动,已经引起了一些物理学家的怀疑。这种怀疑由于牛顿引力论的某些内蕴困难而日渐增强。到上个世纪末,有的物理学家和数学家逐渐认识到有必要对牛顿的引力理论作出修正,其原因有以下几点:

(1) 水星近日点的剩余进动不能严格地用牛顿的平方反比定律解释。

(2) 电磁场可以独立于物质源而以波动的形式存在着,静电的相互作用已经不能再解释为超距作用了。那么,在引力问题上,牛顿的超距作用是否也应该退让给以有限速度传播着的场呢?

(3) 绝对时空的观念在物理上有什么依据呢?

(4) 为什么惯性质量等于引力质量呢?这是牛顿力学基础中一直存在的问题。

(5) 非欧几何,特别是黎曼几何的建立,已经使得判定现实的四维空时连续区的结构究竟是欧几里得的,还是黎曼的,或任何别的,成为一个必须由经验来回答的物理学本身的问题。

彭加勒在1906年发表的一篇文章中,以必须实现对洛伦兹群保持协变这个要求为前提,

构造了第一个相对论性引力理论^[11]。他在文章中明确表示,他打算构造一个对洛伦兹变换群是协变的理论。他提出所有非电磁起源的力也应同洛伦兹力一样具有相同的变换定律。他还讨论了引力相互作用的传播速度,认为这个速度就是光速。彭加勒的理论在引力发展史上有其地位。其后,明可夫斯基(1908年)和索末菲(1910年)把这个理论表述成四维矢量分析的形式,洛伦兹(1910年),德西特(1911年)也对该理论进行了讨论。顺便说明,彭加勒的这篇文章完成于1905年7月,他当时还不知道爱因斯坦的工作。

泡利在1921年分析了这些讨论的得失,他认为:“对所有这些讨论的反对意见是:它们的出发点都是力的基本定律,而不是泊松方程。一旦一个效应的有限传播已被证实,若把它表述成随位置和时间连续变化的函数(一个场),并求出这个场所满足的微分方程,人们就可望得到简单而普遍适用的定律。因此,问题就在于以这样的方式来修正泊松方程

$$\Delta\Phi = 4\pi K\mu_0$$

和粒子运动方程

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\text{grad}\Phi,$$

使它们成为洛伦兹不变式”^[12]。彭加勒-明可夫斯基的理论虽然存在一些缺陷,但它毕竟是第一个相对论性引力理论,它得出的结果与实验值相比较,并不比牛顿理论差,而且它的缺陷可以为爱因斯坦等人发展另一种形式的相对论性处理方法提供借鉴。这种处理方式充分地注意到惯性质量和引力质量相等这个事实以及场论的要求,有可能导向一个更自然的引力理论。

诺德斯特勒姆于1912—1914年间曾经提出两个洛伦兹协变的引力理论^[13]。他的理论在五十年代和六十年代引起了一些物理学家的兴趣。爱因斯坦没有公开发表过洛伦兹协变的引力论,但有迹象表明他也曾作过类似的尝试^[14]。所不同的是,他早在1907年底提出等效原理时,便已领悟到在狭义相对论的框子里解决引力问题的困难。现在我们知道,希耳德(A.

Shild) 在六十年代得出一个重要结论: 引力红移和强等效原理必然意味着空时的弯曲。因而不可能在狭义相对论的框架内建立起一个坚实的引力理论^[4]。

二、广义相对论的创建(1907—1915 年)

爱因斯坦创立广义相对论的思想发展过程大致可以划分为三个阶段: (1) 从 1907 年冬到 1912 年春, 爱因斯坦提出了广义相对论的两个基本原理, 并试图从中引出启示性的结论。(2) 1912 年夏到 1915 年夏, 爱因斯坦从转动圆盘上欧几里得几何不成立, 领悟出引力问题的相对论性处理需要非平坦度规。他和格罗斯曼一起寻求确定黎曼度规本身的微分定律, 但由于抛弃了普遍协变的要求, 未能建立合适的引力场方程。(3) 爱因斯坦在 1915 年 10 月重新回到普遍协变的要求上来, 使他多年辛勤的劳动迅速结晶为丰硕的理论成果。1915 年 11 月里, 他接连发表了四篇重要论文, 并于 11 月 25 日建立了普遍协变的引力场方程。

1. 广义相对论性原理和等效原理及其结论(1907—1911 年)

爱因斯坦在提出狭义相对论后不久, 便已经开始思索, 坐标系有没有进一步的等效性”这个问题。“然而, 直到那时为止的全部力学的基础——惯性原理——看来却不允许把相对性原理作任何推广”^[1]。另一方面, 爱因斯坦关心着引力问题, 并试图把引力纳入狭义相对论的框架。1907 年 5 月, 他在《相对性原理所要求的能量惯性问题》中, 指出物理学还不具有一个“和相对性原理相对应的完整的世界图象”^[16]。这说明他已着手设想一个新的由相对性原理决定其形式的世界图象。在一个完整的世界图象中, 不可能没有引力的地位。爱因斯坦没有沿着这条路走多远, 就敏锐地觉察到他提出的理论不能包容这样一个古老的实验事实: 在引力场中一切物体都具有同一加速度。这足以使他开始怀疑, 狭义相对论是否能对引力理论, 因而也对整个物理学提供令人满意的基础。他后来

在《广义相对论的来源》中, 谈到这个实验事实在他心中所引起的奇异的感觉: “这条定律也可以表述为惯性质量和引力质量相等的定律, 它当时就使我认识到它的全部重要性。我为它的存在感到极为惊奇, 并猜想更深入地了解惯性和引力的关键就在其中”^[2]。因此, 正如爱因斯坦所说的: “广义相对论的创立, 首先是由于物体的惯性质量同引力质量在数值上相等这一经验事实, 对于这一基本事实, 古典力学是无法解释的”^[3]。

爱因斯坦的《关于相对性原理和由此得出的结论》一文完成于 1907 年 12 月 4 日。在最后一章“相对性原理和引力”中, 他第一次提出了广义相对论的两个基本公设, 并分析了由此引出的结论。通常, 我们认为这就是广义相对论的明确起点。爱因斯坦试图把相对性原理进行推广, 他写道: “迄今为止, 我们只把相对性原理, 即认为自然规律同参照系无关这一假设应用于非加速参照系。是否可以设想, 相对性原理对于相对作加速运动的参照系也成立?”^[4]

接着, 爱因斯坦考察两个参照系 Σ_1 和 Σ_2 。 Σ_1 以加速度值 γ 作匀加速直线运动。 Σ_2 是静止的, 但处在一个强度为 γ 的均匀引力场中。由于没有办法把这两个参照系中的物理定律区别开来, 他认为:

“在我们的经验现代水平的情况下, 我们没有理由假设, 参照系 Σ_2 在某一方面是有差别的, 所以我们有下面假设: 引力场同参照系的相当的加速度在物理上完全等价。

这个假设把相对性原理扩展到参照系作均匀加速平移运动的情况。这个假设的启发性意义在于, 它允许用一个均匀加速参照系来代替一个均匀引力场, 而均匀加速参照系这种情况, 从理论研究的观点看来, 在一定程度上是可以接受的”^[4]。

广义相对性原理和等效原理使得我们能够用纯理论方式推出引力场的性质。爱因斯坦的

1) 参见文献[1] p. 46.

2) 参见文献[1] p. 320.

3) 参见文献[1] p. 165.

4) 参见文献[17] pp. 198—199.

思路是这样的：假定我们已经知道伽利略参照物体 K 中自然过程的空时进程，借助于广义相对性原理，我们就能够从一个相对于 K 作加速运动的参考物体 K' 去观察这个已知自然过程是如何表现的。根据等效原理我们知道，对这个新的参照物体 K' 而言存在着一个引力场。所以，“通过从理论上考查那些相对于一个均匀加速的坐标系而发生的过程，我们就获得了关于均匀引力场中各种过程的全部历程的信息”¹⁾。于是，引力场如何影响所研究的过程也就清楚了。沿着这条思路，爱因斯坦导出了两个重要结果。第一，“在过程发生地点的引力势愈大，在时钟中所发生的过程——一般来说是任何物理过程——也就进行得愈快”。由于这样，来自太阳表面的光所具有的波长比地球上同类物质所发出的光的波长大约大两百万分之一。第二，光线被引力场所弯曲。

1907 年底，爱因斯坦把这篇文章寄给他的朋友哈比希特，并告诉他说，他正“忙于引力定律的相对论性理论，并想借此说明一直未能得到解释的水星近日点运动的百年变化”。

爱因斯坦把他产生等效原理的那些想法称为“一生中最令人愉快的思维”。爱因斯坦大约在 1919 年写的一篇文稿^[18]中是这样说的：

“1907 年，……我试图通过修改牛顿的引力理论使之适合于相对论。这方面的尝试显示了实现这个计划的可能性，但这些尝试不能使我满意，因为他们不得不依靠那些没有理论基础的假设来支持。就在那个时候，我产生了一生中最令人愉快的思维，它具有如下的形式：

正如电场是由电磁感应所产生的一样，引力场同样只不过是一种相对的存在。因此，对一个从房顶自由下落的观察者来说，在他下落时不存在引力场（原文为斜体字）——至少在他紧邻的周围不存在。如果观察者松开任何物体，它们相对于观察者将保持静止状态或匀速运动状态，这与它们特殊的化学性质和物理性质无关（在这样考虑中自应忽略空气的阻力）。观察者因而有理由认为他的状态是“静止”的。

通过这样考虑，在同一引力场中一切物体

都以同一加速度下落这个非常难以理解的经验定律，立即显现出深刻的物理意义。因而，即使甚至只有一个物体在引力场中下落得和其他物体不一样，观察者也就能借助于它辨别出他正在下落。但是，如果不存在这样的物体——正象经验以极高的精度证实了的那样——那么观察者就缺乏客观的根据可以认为自己是在一个引力场中下落。相反，他倒有权利把他的状态看成是静止的，而且认为他周围没有（与引力有关的）场。

因此，这个由经验所知的事实，即自由下落加速度与材料无关，是把相对性公设扩展到相互作用非匀速运动的坐标系的一个强有力的证据”。

这的确是一个非常生动的例证，它说明爱因斯坦如何从极平凡的现象中思索出远非平凡的东西。既然引力场也只是相对的存在，在引力场中自由下落的物体局域地变成一个惯性系，那么的确有理由假设用一个均匀加速参照系来代替一个均匀引力场，从而惯性系的特殊性也就被粉碎了。

爱因斯坦于 1911 年 4 月初就任布拉格大学理论物理学教授。他到布拉格才两个月，就完成了《引力对光传播的影响》这篇论文，发展了几年前对这个问题的看法。

在这篇文章中，爱因斯坦指出：“我们不可能说什么参照系的绝对加速度，正象通常的相对论不允许我们谈论一个参照系的绝对速度一样”²⁾。他由能量守恒原理导出了惯性质量等于引力质量。最重要的是，他由太阳光谱线的引力红移，得到一个对理论有根本性重要意义的结果：“如果我们把坐标原点上的光速叫做 c_0 ，那么在一个具有引力势的地方的光速 c 就由关系

$$c = c_0 \left(1 + \frac{\phi}{c^2} \right) \quad (1)$$

得出。“然后，他根据惠更斯原理和 (1) 式得出了光线经过天体附近要受到偏转的结论，并导

1) 参见文献[17] p. 214

2) 参见文献[17] p. 213

出了偏转大小 α 的计算公式:

$$\alpha = \frac{1}{c^2} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=+\frac{\pi}{2}} \frac{KM}{r^2} \cos\theta \cdot dS = \frac{2KM}{c^2\Delta}, \quad (2)$$

此处 K 表示引力常数, M 表示天体的质量, Δ 表示光线同天体中心的距离。”爱因斯坦算出, 光线经过太阳附近所受到的偏转为 0.83 弧秒。最后他表示“迫切希望天文学家接受这里所提出的问题, 即使上述考察看起来似乎是根据不足或者完全是冒险从事”。

有趣的是, 索尔德纳在 1801 年就曾考虑过光线掠过太阳边缘时可能受到的偏转, 他得出的偏转值为 0.84 弧秒。爱因斯坦自然不知道索尔德纳的工作, 而且他使用的方法也不一样。不过, 我们可以从这个巧合中看出, 爱因斯坦当时的理论还不成熟。他当时是在牛顿引力论的基础上引进了一些新的概念。“这中间有爱因斯坦的、部分不正确的思想, 其中有正确与错误的混合物、猜想、不那么明确的信念, 以致很接近问题的正确答案但毕竟还不是”^[19]。

爱因斯坦对待数学的态度在这段时期发生了显著的变化。在布拉格, 他逐渐领悟到自然界具有他过去没有想象到的数学复杂性, 发展广义相对论要求他具备更深的数学知识。把相对性原理推广到彼此相互作用非匀速运动的坐标系上去, 这意味着要建立这样一种理论, 它的方程在坐标的非线性变换下, 其形式保持不变。爱因斯坦看出: “接受了等效原理所要求的非线性变换, 对于坐标的简单物理解释, 无可避免地是致命的——那就是说, 不能再要求: 坐标差应当表示那些用理想标尺或理想时钟所测得的直接量度结果”^[20]。他被这个问题大大困惑住了, 因为他当时还看不清坐标在物理学中的意义究竟是什么。

2. 引力场与度规之间联系的发现 (1912—1914 年)

泡利认为: “这样把两个先前完全不相关的课题——度规和引力——融合在一起, 必须看成是广义相对论的最光辉的成就”^[21]。爱因斯坦在 1912 年以前发表的文章中没有提到过非

平坦空时, 更说不上用度规张量作为引力场的数学表示。但是在 1913 年发表的他 and 格罗斯曼合作的第一篇论文《广义相对论纲要和引力理论》中, 却已经提出了用度规张量 $g_{\mu\nu}$ 以及黎曼流形上的张量分析、黎曼曲率张量等来表示引力场的相当成熟的论证。可以想见, 正是在这一段时间内, 爱因斯坦的思想发生了一次飞跃。

这个飞跃是由爱因斯坦对刚体转动圆盘所作的分析中产生出来的。1912 年 2 月, 爱因斯坦在《光速和引力场的静力学》中提出, 由于洛伦兹收缩, 圆周和它的半径之比不等于 π , 从而使欧几里得几何学的定理“在均匀转动的参照系中极有可能不成立”^[20]。1912 年 3 月, 在《静引力场理论》中, 他得出结论, 等效原理只能局部地成立。在 1912 年 7 月 7 日前不久写信给埃伦菲斯特的一封信中, 他注意到他关于静引力场的讨论对应着电磁理论中静电场的情形, 而他所称的“广义静止情况”和静磁场相类似。他提到“转动圆盘”将产生这样一种非静止的但和时间无关的场”^[21]。对这种引力场的研究有可能使他重新考查转动圆盘问题, 从而得出结论: 在转动圆盘上, 也就是在一个引力场中, 欧几里得几何学的命题不能严格成立。换句话说, 坐标差失去了直接的度量意义。这一点他在几年前曾大为困惑, 而今不同的是他看出了引力和空时几何的联系, 引力场影响乃至决定时空连续区的度规定律。他已经有可能找到他的理论和高斯的曲面论的“接触点”, 从而发现那个使他长期困惑的问题的答案。毕竟, 如果要想真正从“坐标必须具有直接的度规意义”这种习惯性思维中解放出来, 还必须找到问题的出路。爱因斯坦现在需要寻找一种在转动圆盘上成立的几何学。这时, 高斯的曲面论对他有极大的启示性作用。在高斯的曲面论中, 由于在曲面上不可能引用具有简单度规意义的坐标, 他引进曲线坐标来克服这个困难。欧几里得几何在曲面上足够小的区域内才是成立的, 这可以和上

1) 参见文献[1] p. 321.

2) 参见文献[12] p. 200.

面所说的等效原理只能局部地成立这个想法联系起来。由此可见,爱因斯坦的广义相对论和高斯的曲面论确有许多相似之处。“高斯的曲面论与广义相对论间最重要的接触点就在于度规性质,这些性质是建立两种理论的概念的主要基础。”^[22]高斯关于曲面的论述不难推广到三维、四维或维数更高的连续区。爱因斯坦也曾明确地说过:

“我第一次具有这个理论(广义相对论)和高斯的曲面论联系着类似的数学问题这个决定性的思想,是在1912年当我回到苏黎世以后,那时我还不了解黎曼的,里奇的或勒维-契维塔的工作。”^[21]

正是在这个时候,明可夫斯基用四维矢量分析来表述狭义相对论的方法有可能对爱因斯坦产生重要的启发作用。这不仅因为二维曲面分析有待于推广到四维的情况,而且还因为这种方法容易使人看清度规的意义和惯性定律在四维时空中的表述方式。现在,爱因斯坦找到了坐标微分的物理意义问题的答案:在引力场存在的情况下,坐标的微分没有物理意义,只有同它们相对应的黎曼度规才有物理意义。在寻求这个答案的过程中,爱因斯坦还发现了用度规给出的惯性定律的新表述:度规的类时极值线,提供除了引力之外不受其他力所作用的质点的运动定律。引力和度规这两个过去完全无关的东西,现在由爱因斯坦把它们结合起来了。我们或许可以说,产生了引力场的相对论性处理需要非平坦度规这个决定性的思想,就等于找到了正确描述引力场的数学量,而为度规张量 $g_{\mu\nu}$ 找到一个合适的场方程,只不过是时间上的迟早问题。

“这样,引力问题就归结为一个纯数学的问题了。对于 g_{ik} 来说是否存在着一个对非线性坐标变换能保持不变的微分方程呢?这样的微分方程而且只有这样的微分方程才能是引力场的场方程。”^[1]1912年7月25日爱因斯坦离开布拉格重回母校苏黎世工业大学任教授。在他离开布拉格前,他已经知道他需要与微分线元

$$d^2S = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

相关联的不变量和协变量的理论,其中 $g_{\mu\nu}$ 以某种方式描写引力场。

1912年8月,爱因斯坦一家返回苏黎世。他立刻带着这些问题去向他的老同学几何家马塞尔·格罗斯曼请教,格罗斯曼从1907年起就已是这个大学的几何学教授。为了解决爱因斯坦提出的问题,格罗斯曼立即到图书馆查阅了文献,并且很快发现,确实存在一种爱因斯坦所需要的几何,这就是黎曼几何。“8月10号到16号之间的某个时候,爱因斯坦明白了黎曼几何是我们今天称之为广义相对论的正确的数学工具。”^[2]后来,爱因斯坦在一篇完整阐述广义相对论的总结性文章中写道:“广义相对论所需要的数学工具已经在‘绝对微分学’中完全具备,这种‘绝对微分学’以高斯、黎曼和克里斯托菲尔关于非欧几里得流形的研究为基础,并由里奇和勒维-契维塔建成一个体系,并且已应用于理论物理学的一些问题上。”^[3]经过同格罗斯曼讨论,爱因斯坦找到了广义相对论的新的出发点。从这时起,格罗斯曼和爱因斯坦这两个学生时代的朋友共同探讨引力问题。在一年多的时间内,他们合写了三篇文章,这些文章标志着广义相对论发展过程中的一个重要阶段。

1913年爱因斯坦和格罗斯曼发表了《广义相对论纲要和引力论》^[4],这是他们合作的第一篇文章,也是他们把爱因斯坦的新的物理思想和与此相适应的数学方法相结合来解决引力问题的第一次尝试。在这篇论文中他利用十个空间——时间函数 $g_{\mu\nu}$ 来描述引力场。惠塔克给予这个思想以很高的评价,他认为用十个代表引力势的函数 $g_{\mu\nu}$ 来规定引力场,“这是一个巨大的创新,因为他意味着抛弃一个由来已久的信条,即认为引力场能够被一个单一的标势函数所规定。”^[23]

爱因斯坦正确地猜测到,为使量 $g_{\mu\nu}$ 即引力

1) 参见文献[1]p.48.

2) 参见文献[10]p.216.

3) 参见文献[17]p.278.

4) 参见文献[17]pp.224—267.

场得以确定的微分方程应从推广泊松方程 $\Delta\phi = 4\pi K\rho$ 中得出。所求的方程十之八九应当具有下列形式：

$$\kappa\Theta^{\mu\nu} = \Gamma^{\mu\nu}, \quad (3)$$

其中 κ 是常数， $\Theta^{\mu\nu}$ 是物质体系张量， $\Gamma^{\mu\nu}$ 是由基本张量 $g_{\mu\nu}$ 的导数构成的二秩逆变张量。

这篇论文有两个问题值得注意。第一，在 1913—1914 年间，爱因斯坦所坚持的是这里提出的场方程^[1]，而这个场方程还不是普遍协变的。爱因斯坦当时发现：单值地确定 $g_{\mu\nu}$ 和 $\Theta^{\mu\nu}$ 而同时又是普遍协变的方程，一般不可能存在。第二，按照这个场方程算出的水星近日点的进动值不符合观测值，爱因斯坦在两年以后才明白了这一点。

普遍协变是广义相对论的一个基本思想。由于广义相对论的成功，我们今天看来普遍协变的要求是很自然的。普遍协变意味着各种参照系都有存在价值，从而没有必要到参照系之外去寻求帮助。那么，为什么爱因斯坦当时会放弃普遍协变的要求呢？

格罗斯曼很清楚爱因斯坦的物理思想给数学所提出的任务。他认识到寻求引力场微分方程问题是同对微分不变式和二次形式的微分协变式 $dS^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ 的考察相关联的。他明确提出：“这些微分协变式理论在我们的广义矢量分析的意义上导致规定引力场的微分张量。这些微分张量（相对于任意变换）的完整体系归结为所求的四秩黎曼和独立的克里斯托菲耳协变微分张量”，即 $R_{\mu\nu}$ 。但是他紧接着得出了一个错误的结论，“在无限弱的静止引力场的特殊情况中，这个张量不归结为 $\Delta\phi$ ”。这就是说场方程 $R_{\mu\nu} = 0$ 在第一级近似的情况下不能给出牛顿定律的形式。

爱因斯坦在他写的物理部分中也得出了一个错误的结论，他认为，如果把拉普拉斯算符作用到基本张量 $g_{\mu\nu}$ 之上，那么这些算符就会退化。因此，所求的引力场方程只对于一个确定的变换群才是协变的。爱因斯坦在一篇论文中说：“根据一般的考查，我能证明：对于任何坐标变换都不变的引力定律，同因果性原理是矛

盾的¹⁾。”他在这篇论文的附注中试图证明，可以从解的非唯一性导出引力场方程不可能是普遍协变的。换句话说，如果坚持认为 $\Theta^{\mu\nu}$ 完全确定 $g^{\mu\nu}$ 的值，那就必须限制坐标系的选择²⁾。

这个错误使得爱因斯坦耗费了两年极端艰苦的劳动。他放弃了普遍协变原理而只允许线性变换，以便拯救守恒原理。后来，他把决定度规张量的场方程推广到允许这样的一组变换，它比线性变换要普遍一些，但又不至于普遍到允许任意的点变换。

这里顺便提到，在 1912—1913 年间，阿布拉罕、米和诺得斯特勒姆等就引力问题同爱因斯坦展开了讨论。这种讨论，有时发展到非常激烈的批评与争辩，对于引力理论的发展是有促进作用的。

3. 普遍协变的引力场方程的建立(1915 年 10—11 月)

爱因斯坦于 1914 年 4 月从苏黎世迁居到柏林。他才刚刚三十五岁，但已经是普鲁士皇家科学院院士、威廉皇帝物理研究所所长兼柏林大学教授。这个新职务使他能够完全自由地从事自己的研究工作而不必承担其他责任。

爱因斯坦已经掌握了建立广义相对论所必须具备的数学知识。在引力方面，他现在要做的是给他和格罗斯曼的理论更为清晰的数学说明，并从中推导出可以用实验检验的结果。1914 年秋天，爱因斯坦提交给柏林科学院一篇很长的论文^[24]。这篇论文没有实质性的进展，特别是他在文中再次坚持引力场方程只能在线性变换下协变。直到 1915 年的上半年，爱因斯坦都没有怀疑他和格罗斯曼的引力理论的正确性。与此相反，他对这个理论相当满意。在公开发表的文章中，他的态度在同年 11 月才完全改变。可是在通信中，他却渐渐表露出对已经获得的成果不那么自信了。

在 1915 年 11 月 7 日给希耳伯特的明信片^[25]中，爱因斯坦说明，他在 1914 年在柏林科学

1) 参见文献[1] p. 322.

2) 参见文献[17] p.266.

院会议上发表的论文中所企图证明的(3)式是不正确的,关于这一点他已经知道“大约有四周”了。另外,在1915年10月12日给洛伦兹的信中¹⁾,爱因斯坦表示对他过去限制哈密顿函数的选择并运用变分原理导出(3)式的尝试有保留。而这正是他在1915年11月4日的论文中提出要抛弃(3)式的原因。

仅仅这一点,恐怕还不足以使爱因斯坦否定(3)式。他在同年11月28日写给索末菲的信中,列举了三点理由说明他为什么会对自己1913年的理论失去信心:

“我认识到,到现在为止我的引力场方程是完全站不住脚的!关于这一点,有如下一些线索:

(1) 我证明了,引力场对一个均匀转动的参照系并不满足场方程。

(2) 水星近日点的运动,每一百年为 $18''$;而不是 $45''$ 。

(3) 在我去年的论文中,协变的考察没有提供哈密顿函数 H 。如果把它加以适当推广,它就会允许任意的 H 。于是,要‘适应’坐标系的协变,是徒劳无功的。”²⁾

由于以上原因,爱因斯坦又重新回到普遍协变的要求上来,从而取得非常迅速的进展。他多年苦心孤诣的探索,在一个多月内结晶出完美优美的成果。1915年11月4日、11日、18日和25日,他接连向普鲁士科学院提交了四篇论文,提出了新的引力理论,建立了普遍协变的引力场方程。在11月4日的论文中,他开门见山地谈到他的认识过程:

“在过去的几年中,我以非匀速运动的相对性假设为依据努力尝试去构造广义相对论。我真的以为已经发现了和广义相对性公设相对应的最好的引力定律,在去年这个会上发表的一篇文章³⁾中,还曾企图证明精确解的必然性。

最近的考察使我明白,那里提出的方法全然不能证明解的必然性;事情看起来如此,是以错误为依据的。……

由于这些原因,我对我所建立的场方程完全失去了信心,并开始寻找一种途径,以便使

可能性以某种自然的方式受到限制。因此,我又重新回到场方程的普遍协变的要求,可是在三年前,当我和我的朋友格罗斯曼一起工作时,我曾经以沉重的心情把它抛弃了,实际上,我们那时就已经相当接近下面所要给出的问题的解答。”这篇论文虽然还存在要改进的地方,但它表明爱因斯坦已经摆脱了引力场方程只能在线性变换下保持协变这个错误。爱因斯坦很有信心地宣称:“任何完全懂得这个理论的人,几乎都不能从它的魅力中逃脱”。

在这篇论文中,真正的进展来自对黎曼-克里斯托菲耳张量的重新认识。引力问题现在同里奇张量联系在一起,爱因斯坦把这个张量分成两部分:

$$G_{im} = R_{im} + S_{im}, \quad (4)$$

$$R_{im} = -\frac{\partial \Gamma_{im}^l}{\partial x^l} + \Gamma_{il}^\rho \Gamma_{\rho m}^l, \quad (5)$$

$$S_{im} = -\frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^m} - \Gamma_{im}^\rho \Gamma_{\rho l}^l. \quad (6)$$

他给出的引力场方程为

$$R_{\mu\nu} = -\chi T_{\mu\nu}. \quad (7)$$

爱因斯坦在先前的能量-动量守恒方程中,认为量 $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\tau}$ 是引力场分量的自然表示。而现在则不同了,他在给索末菲的信中说:“给我打开问题的钥匙的,是由于认识到:不是

$$\Sigma g^{ia} \frac{\partial g_{ai}}{\partial x_m},$$

而是这里的克里斯托菲耳符号 $\left\{ \begin{smallmatrix} im \\ e \end{smallmatrix} \right\}$ 才应当被看成是引力场分量的自然表示”。³⁾

但是(7)式仍然不是普遍协变的,这是因为 R_{im} 不是张量。只有当坐标系变换满足

$$\frac{(x'_1 \cdots x'_4)}{(x_1 \cdots x_4)} = 1 \quad (8)$$

这个条件时, R_{im} 才象张量那样变换,(7)式才可能是协变的。

爱因斯坦没有停留在这个结果上,一周后

1) 参见文献[25] p.294.

2) 参见文献[1] p.80.

3) 参见文献[1] p.81.

他把场方程发展为^[27]

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (9)$$

这里 $G_{\mu\nu}$ 即是里奇张量。第二天, 即 11 月 12 日, 他寄给希耳伯特一张明信片, 宣布他终于得到了普遍协变的场方程。但是, 爱因斯坦却给了场方程一个更为严格的限制条件:

$$\sqrt{-g} = 1. \quad (10)$$

这就使得这个理论包含着严重的困难。(6) 式和(10)式意味着 $S_{im} = 0$, 从而使得(9)式还原为(7)式。另外, 他以前已经证明(7)式可由变分原理导出, 并且存在着恒等式

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\beta} \right) = -\kappa T, \quad (11)$$

其中 T 为 $T_{\mu\nu}$ 的迹。而由(10)和(11)式得出 $T^\alpha_\alpha = 0$ 。

在过去的三年中, 爱因斯坦曾因臆想中的困难抛弃了普遍协变的要求。一旦他重新认识到它的必要性, 他宁愿提出其他假设来解释所面临的困难。他说: “让我们暂且假设在一个完备的电磁学中能量张量的标量也会消失! 这个结果是否能够证明物质不能借助这个理论而被构造出来呢? 我相信问题的答案是否定的。因为完全有可能引力场就是物质的一个基本组成部分……。实际上只有 $\sum_\mu (T^\mu_\mu + \epsilon^\mu_\mu)$ 是正

的, 且 $\sum_\mu T^\mu_\mu$ 处处消失。下面, 我们将假设条件 $\sum_\mu T^\mu_\mu = 0$ 的确得到普遍满足¹⁾。两周后, 他认识到这个看法是不正确的。

(9)式虽然还有待改进, 但在真空中, 它们可以化为正确的形式:

$$G_{\mu\nu} = 0. \quad (12)$$

特别是, 由(12)式可以正确地解释水星近日点的运动, 爱因斯坦就是这样做的。他在 11 月 18 日提交的论文中²⁾, 给出的真空中的引力场方程为

$$\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} = 0. \quad (13)$$

他以十分满意的心情宣告: “在本文中我找到了这种最彻底和最完全的相对论的一个重要证明; 因为它显示了, 这个理论用不着根据任何特

殊的假说, 就既定定性又定量地解释了勒末里埃所发现的水星轨道在轨道运动意义上的久期旋转, 它在 100 年内大约转 $45''$ 。”³⁾就在这篇论文中, 爱因斯坦还修改了他四年前得出的光线在太阳引力场中的偏转值。这个偏转值应为 $1.7''$, 而不是先前的 $0.85''$ 。这两个重要发现对爱因斯坦后来的生活产生了重大影响。他在同一天写给希耳伯特的明信片中说, 直到现在还没有一个引力理论成功地做到了这一点。

11 月 25 日, 爱因斯坦在该月提交的第四篇论文^[28]中建立了普遍协变的引力场方程。他认识到物质的能量张量的标量为零的假设是多余的。主要由于有可能这样来选择参照系: 使行列式 $|g_{\mu\nu}| = -1$, 而又不致影响场方程的普遍协变性。爱因斯坦把引力场方程修改为现在为人们所熟悉的形式:

$$G_{im} = -\kappa \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right), \quad (14)$$

其中 $g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma} = T^\alpha_\alpha = T$ 。

爱因斯坦为广义相对论的最后建成而感到十分欣喜。11 月 28 日, 他在给索末菲的信中说: “上个月是我一生中最激动、最紧张的时期之一, 当然也是收获最大的时期之一。”⁴⁾他把这个成功看成是他一生中所作出的最有价值的发现。

参 考 文 献

- [1] 许良英、李宝恒、赵中立、范岱年编译, 爱因斯坦文集, 商务印书馆, 第一卷, (1977), 323.
- [2] A. Eddington, Space, Time and Gravitation, Cambridge Press, Preface (1953).
- [3] 同[1], 商务印书馆, 第二卷, (1979), 118.
- [4] E. Whittaker, A. History of the Theories of Aether and Electricity, Thomas Nelson, Vol II, (1953), 44.
- [5] L. Infeld, Albert Einstein, His Work and His Influences on Our World, Charles Scribners' Sons, (1950), 47.
- [6] 爱因斯坦著, 杨润殷译, 狭义相对论浅说, 上海科技出

(下转第161页)

1) 参见文献[27] pp.799—780.

2) 参见文献[17] p.268.

3) 参见文献[17] p.268.

4) 参见文献[1] p.8 0.