

无质量中微子螺旋性混合态

汪克林¹ 曹则贤^{2,†}

(1 中国科学技术大学近代物理系 合肥 230026)

(2 中国科学院物理研究所 北京 100190)

摘要 自旋为 1/2 的中微子遵从 Majorana 方程,其螺旋性为守恒量.利用压缩相干态可以为中微子给出螺旋算符与哈密顿量之共同本征态的显式表达,但却是不可归一化的.可归一化的波包依然保持为螺旋算符的本征态,但不再是能量的本征态.存在传播速度为零的等权混合螺旋态波包.此情形没有经典对应,在无质量玻色子世界中也无对应.若这样的混合螺旋态波包对应无质量费米子的粒子-反粒子对,则提供了一种暗物质的可能构成方案.

关键词 无质量中微子,螺旋性,手性,混合态,暗物质

State of mixed-helicities for massless neutrino

WANG Ke-Lin¹ CAO Ze-Xian^{2,†}

(1 *Department of modern physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

(2 *Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

Abstract Spin 1/2 massless neutrino obeys the Majorana equation, and its helicity is a constant of motion. By using the squeezed coherent states, we derived the explicit representation of the common eigenstates of helicity operator and Hamiltonian for neutrinos, which, however, are non-normalizable *per se*. The packet waves thereupon constructed preserve the helicity, but are no more the eigenstate of energy. It is proved that for the wave packet of equally-mixed helicities, the propagation velocity vanishes. This is a scenario without correspondence in either the classical world or the massless Bosons. If such a wave packet of mixed helicities represents a neutrino-antineutrino pair, this may provide a reasonable candidate for dark matter.

Keywords massless neutrino, helicity, chirality, mixing state, dark matter

1 引言

为大家所熟知的无质量粒子包括作为玻色子的光子和作为费米子的中微子——三种不同味的中微子至少其中一种原则上质量可以为零^[1-3], 因为中微子的味同其质量不具有共同本征态. 最新观测结果认为, 三种中微子质量之和的上限为 0.28eV ^[4]. 光子的自旋为 1, 而中微子的自旋为 1/2 (取 $\hbar=1$). 过去一般认为, 既然两者都是无质量粒子, 那么它们的传播速度都应该是光速 c , 尽管用相对论与量子理论结合建立起来的相对论性量子力学描述这两种

粒子的运动方程是迥然不同的^[5]. 近年来陆续有一些关于中微子传播速度的实验研究, 甚至根据这些实验报告的结论, 似乎中微子的传播速度还超过了光速^[6-8]. 这种有可能打破相对论基本原则的结果引起了广泛的关注 (最新消息说是设备接口导致了中微子的 60 纳米超前, 这更是笑话. 其实, 不管有无这个因素捣乱, OPERA 的实验都存在问题: 一、光速附近的速度就不能用 $\Delta x/\Delta t$ 的方式来测量, 这是原理性的问题; 二、测量的精度 (precision) 不是准确度 (accuracy), 他们关于结果数据置信度的讨论是

2012-01-03 收到

† 通讯联系人. Email: zxcao@aphy.iphf.ac.cn

不正确的,涉及的也是如何做实验的基本问题.此话题不在本文范围,容另文讨论).自然,这也引起了对无质量粒子——特别是中微子这样的无质量费米子——相关物理的重新审视.本文中,我们把关于无质量中微子的一些理论考虑^[9]扩展到也包含光子在内的更广泛的范围内加以讨论.根据我们的理解,这一相关方向上存在一些过去并未完全阐释清楚的基本问题,需要进行恰当的、严密的论证.

在讨论之前,我们首先关注一篇非常有意义的发表于2011年的文献^[10],其中关于中微子螺旋性反转可能性的内容和中微子的超光速实验有密切的关系.为了方便后续的讨论,此处先将无质量中微子的相对论性哈密顿量列出:

$$H = c \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} , \quad (1)$$

这里 $\boldsymbol{\sigma}$ 为泡利矩阵, \boldsymbol{p} 为粒子动量.可以看出,粒子的螺旋性 (helicity) $\eta = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} / p$ 为一守恒量,因为显然地有 $[\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} / p, H] = 0$, 且 $[\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} / p]^+ \cdot [\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} / p] = 1$, 则螺旋性有 ± 1 的本征值.也就是说,无质量中微子既可以处于螺旋性为正的状态,也可以处于螺旋性为负的状态.然而 Maurice 等人1958年通过对 $\text{Eu}^{152\text{m}}$ 俘获轨道电子发射之 γ 光子的偏振态和共振散射的综合分析,认定中微子只有负的螺旋性;而反中微子的螺旋性为正^[11].若中微子无质量,这也意味着只有一种手性的粒子被观察到(关于无质量中微子,螺旋性和手性有同样的本征值;关于反中微子,手性和螺旋性的本征值相反^[10]),这里是关于粒子相互作用的标准模型中唯一包括进手性的地方.对于上述测量结果,有人猜测认为右手性无质量的中微子不存在.另一种可能是,或者右手性中微子存在,但要么质量很大(比如基于 see-saw mechanism 的考量^[12]),要么不参与弱作用,或者兼而有之.那么,到底该如何理解上述实验结果呢?

相对论量子理论得到的中微子理论中,无质量中微子具有两种螺旋性的本征态,未有其他任何理由或者因素断定它只能取负的螺旋性状态.当前的实验结论是,无质量中微子只有负的螺旋性,反中微子具有正的螺旋性.这当然是物质和反物质之间一般意义上对称性的体现(其它场合可能涉及的是电荷对称性,这同手性或者螺旋性的对称不同).但是,注意到物质和反物质在(标准模型)理论中是完全处于对等地位的,我们的自然界却几乎全是由物质组成的.有趣的是,我们目前不能确定中微子一反中微子在数目上的非对称性,但是中微子没有或者只有测量极限以下比例的正螺旋态.这两者之间是否

有某些内在关联,或者对其一的理解对另一问题具有某种启发性,尚待未来的研究进展加以阐述.

中微子只有负螺旋性的论断持续四十年后,1998年福冈探测器上的中微子研究表明^[13],三种不同味的中微子中,有两种应当具有极小的但不为零的质量.对于有质量的中微子,因为速度不为光速,理论上存在赶上中微子的可能性,则螺旋性不再具有绝对的意义.这个结果对维持了四十余年的结论产生了冲击.但是如果是这样,应该能看到螺旋性反转的可能性,并给出了检测方案.文献^[10]的撰写动机就在于此.

应当指出,一旦中微子具有质量,它应该遵循四分量的 Dirac 方程,而不是二分量的 Dirac 方程.但从理论上讲,对于相对速度为零的观察者,螺旋性不是有个确定意义的量.即使中微子对某个观察者在某个时刻有确定的螺旋性,它也是个可变的量.文献^[10]这篇文章提出了三种实验设想去观察中微子处于正螺旋性的可能性:

(1)既然中微子质量不为零,则根据相对论其速度必小于光速,存在一个中微子速度为零的坐标系.在这个坐标系里,粒子的螺旋性是没有定义的.根据这个思路,一个负螺旋性的粒子,其速度和自旋方向相反.若将另一个粒子(观测者)加速到速度超过该中微子的速度,则从该粒子上观察中微子,则由于中微子自旋不变而动量反转了方向,中微子的螺旋性发生反转,螺旋性变为正的.当然由于中微子质量极小,以质量为 10^{-2} eV 来估算,对于能量低到 100keV 的中微子, $\gamma = E/mc^2 = (1 - \beta^2)^{-1} = 10^7$, 而速度 $v/c = \beta \sim 1 - 10^{-14}$.把另一个粒子,哪怕是电子,加速到这个速度依然需要 10TeV 的能量.这在可见的未来是不现实的.

(2)对于有质量的中微子,它应该满足 Dirac 方程,可以直接求解 Dirac 方程.可以预期其定态解一定不是螺旋性算符的本征态,而是两种螺旋性态的叠加.对于自由的粒子,其波函数为四分量旋量

$$u = \begin{pmatrix} \chi \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} c \chi \\ E + mc^2 \end{pmatrix} e^{-i(Et - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r})/\hbar} .$$

这样,原则上可以测量到中微子波函数中的螺旋性反过来的部分,这是自其一产生就有的.但是因为质量太小,对应正螺旋性的分量应该比例极小 (m_e/E),无法为实验测到.

(3)最后一种找寻正螺旋性的方法立足于中微子与反中微子是同一种粒子的假设上,即假定中微子为 Majorana 粒子,于是可以通过双 β 衰变来证实

中微子不仅有质量,且也符合上述假设,这为找到正螺旋性状态的中微子粒子提供了可能.

根据文献[10]的主要论点,可以得出如下结论,1958年—1988年间认定中微子是负螺旋性粒子的观点是偏颇的.1998年关于太阳中微子的测量^[13]以及其它相关实验^[10],可以肯定的是对中微子处于负螺旋性态的观测并不排除正螺旋性状态.基于以上对中微子理论和实验研究的考察来看,讨论无质量中微子的传播速度和螺旋性之间的关联就很有意义了.

2 问题讨论

本文仅讨论无质量中微子的情形.无质量中微子的哈密顿量为方程(1).为简单起见,设中微子运动方向为 x , 则

$$H = c \sigma_x \hat{p}_x . \quad (2)$$

按如下方式引入产生与湮灭算符:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{i\Delta}{\sqrt{2}}(b - b^\dagger) \\ \hat{p} &= \frac{1}{\sqrt{2}\Delta}(b^\dagger + b) \end{aligned} , \quad (3)$$

其中 Δ 的量纲为长度,(2)式中哈密顿量变成

$$H = A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (b + b^\dagger) , \quad (4)$$

其中常数 $A = \frac{c}{\sqrt{2}\Delta}$.

可以证明

$$|+, \alpha\rangle = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}b^\dagger b^\dagger + \alpha b^\dagger} \\ e^{-\frac{1}{2}b^\dagger b^\dagger + \alpha b^\dagger} \end{pmatrix} |0\rangle , \quad (5a)$$

$$|-, \alpha\rangle = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}b^\dagger b^\dagger - \alpha b^\dagger} \\ e^{-\frac{1}{2}b^\dagger b^\dagger - \alpha b^\dagger} \end{pmatrix} |0\rangle , \quad (5b)$$

分别是螺旋性算符为 $+1$ 和 -1 的本征态,且对应的能量本征值为 $\pm A\alpha$.不过,显然这两个螺旋性本征态是不可归一化的,含 $e^{\beta b^\dagger b^\dagger} |0\rangle$ 项的模对于 $|\beta| \geq \frac{1}{2}$ 会发散,因而它们不可以作为物理实在的状态.按如下方式构造中微子的波包表示:

$$|+, \gamma, \alpha_0\rangle = \int e^{-\gamma(\alpha - \alpha_0)^2} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}b^\dagger b^\dagger + \alpha b^\dagger} \\ e^{-\frac{1}{2}b^\dagger b^\dagger + \alpha b^\dagger} \end{pmatrix} |0\rangle d\alpha , \quad (6a)$$

$$|-, \gamma, \alpha_0\rangle = \int e^{-\gamma(\alpha - \alpha_0)^2} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}b^\dagger b^\dagger - \alpha b^\dagger} \\ e^{-\frac{1}{2}b^\dagger b^\dagger - \alpha b^\dagger} \end{pmatrix} |0\rangle d\alpha , \quad (6b)$$

它们依然是螺旋性分别为 $+1, -1$ 的态,但不再是能量本征态.

3 相对论量子理论中的非经典物理规律

有了波包的显式表达,可以考察其可能表示的粒子的运动规律.考虑如下对应 $t=0$ 时刻的粒子波函数 $|\Psi_0\rangle = |+, \gamma, \alpha_0\rangle + |-, \gamma, \alpha_0\rangle$, 即

$$|\Psi_0\rangle = \int e^{-\gamma(\alpha - \alpha_0)^2} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}b^\dagger b^\dagger + \alpha b^\dagger} + e^{-\frac{1}{2}b^\dagger b^\dagger - \alpha b^\dagger} \\ e^{-\frac{1}{2}b^\dagger b^\dagger + \alpha b^\dagger} + e^{-\frac{1}{2}b^\dagger b^\dagger - \alpha b^\dagger} \end{pmatrix} |0\rangle d\alpha , \quad (7)$$

此波函数对应两种螺旋性的等权混合状态,则在任意 t 时刻,

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \\ & \int e^{-\gamma(\alpha - \alpha_0)^2} e^{-iA\alpha t} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}b^\dagger b^\dagger + \alpha b^\dagger} + e^{-\frac{1}{2}b^\dagger b^\dagger - \alpha b^\dagger} \\ e^{-\frac{1}{2}b^\dagger b^\dagger + \alpha b^\dagger} + e^{-\frac{1}{2}b^\dagger b^\dagger - \alpha b^\dagger} \end{pmatrix} |0\rangle d\alpha . \end{aligned} \quad (8)$$

由于它的上下两个分量分别对应只含有偶数的“粒子数”状态,可证明位置算符的期待值

$$\bar{x}(t) = x_0 + \langle \Psi(t) | \hat{x} | \Psi(t) \rangle / \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = x_0 , \quad (9)$$

这即是说,该波包对应的粒子的速度为零.相应的能量期待值为

$$E = \langle \Psi(t) | \hat{H} | \Psi(t) \rangle / \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = 0 . \quad (10)$$

把由相对论量子理论导出的这一状态的性质同经典的相对论力学的基本规律作比较,会发现两者没有完全的一致性.经典相对论力学关于无质量粒子的结论是:经典无质量粒子的速度为光速 c , 能量为有限值.不存在速度小于光速的无质量粒子.与此相对,看看相对论量子理论的结论,我们发现,系统处于方程(6)这种形式的波包为螺旋性的本征态,其行为完全与经典行为对应,只能是光速 c , 没有其他可能.而处于方程(7)这样的混合态,其速度可以为零(对于这个似乎与参照系无关的速度为零到底意味着什么,我们还不清楚.它也许是无质量中微子必然是 Majorana 粒子的证据).当前实验涉及的中微子都处于高能态,不论有无质量,其速度都是接近光速,但排除这样的速度为零的混合态的存在,尚需要细致的工作.

方程(7) 或者(8) 表示的状态,就无质量中微

子而言,它可以理解为两种螺旋性本征态的叠加.而如果真如此前认为的那样,中微子只能取一种螺旋性的态,反中微子取相反的螺旋性态,则它对应的应该是中微子和反中微子的等量混合状态.前面我们已经证明,粒子处于方程(7)或者(8)那样的状态其波包速度为零.可以把方程(7)推广到两种螺旋性本征态的任意比例的混合,即

$$|\Psi\rangle = a |+, \gamma, \alpha_0\rangle + \sqrt{1-a^2} |-, \gamma, \alpha_0\rangle$$

$$a \in [0, 1] .$$

(11)

很显然这样的状态处于两种极端情形之间,对应的波包速度可以取零到光速之间的任意值.这种情形是没有经典对应的,在玻色子那里也没有.

4 暗能量、暗物质的猜想

上述的能量为有限值而波包速度可以为零的状态,或许可以对理解暗能量和暗物质提供一些启发性的思考.将(7)式看成是无质量中微子—反中微子对的状态,则它们是暗物质的绝佳候选者,且是费米子(物质粒子).若有质量的中微子—反中微子对也有类似的处于两种螺旋性态的等权混合态,其速度很低,则可能是暗物质的候选构成.关于后一点,有观点认为冷暗物质的观点应该抛弃,而代之以热中微子作为暗物质的方案^[14].不管是冷的还是热的中微子可能构成暗物质,理论上存在速度接近于零的中微子是至关重要的一点.从这点来说,我们的工作是有启发意义的.

5 与无质量光子的比较

中微子与光子虽然同属无质量粒子,但是满足不同的方程.光子没有出现量子理论—经典理论不对应的规律.根源在于光子没有外部自由度与内禀自由度之间的耦合(能量交换),这从具体的光子的方程及中微子的方程(自旋 1/2 粒子的 Dirac 方程)可以看出.由于 Dirac 粒子及中微子都有外部自由

度与内禀自由度(自旋)之间的耦合,因此才有 Dirac 粒子的颤振运动(Zitterbewegung)现象^[15],使得 Dirac 粒子,其中包括中微子,都有速度小于光速的非经典对应现象的出现.

6 小结

我们从自旋为 1/2 的无质量费米子的 Dirac 方程出发,给出了无质量费米子可归一化波包的严格表达,从而注意到无质量费米子形式上存在速度在零到光速间任意值的状态.这样的行为显然没有经典对应,在无质量玻色子世界中也没有对应.若螺旋态等权叠加的波包对应的是中微子—反中微子对的话,这提供了一个暗物质的绝佳选择.此波包形式是严格推导的结果,如其推论不能获得实验或观测上的支持,则意味着我们关于无质量费米子的理论存在某些需要关注的不自洽的地方.

参考文献

- [1] Karagiorgi G *et al.* Phys. Rev. D, 2007, 75: 013011
- [2] Fukuda Y *et al.* Phys. Rev. Lett. , 1998, 81: 1158
- [3] Weinheimer Ch *et al.* Phys. Lett. B, 1999, 460: 219
- [4] Thomas Sh A, Abdalla F B, Lahav Ofer. Phys. Rev. Lett. , 2010, 105: 031301
- [5] Landau L D, Lifshitz E M. Quantum Mechanics. Butterworth Heinemann, 1991
- [6] Hirata K *et al.* Phys. Rev. Lett. , 1987, 58: 1490
- [7] Bionta R M *et al.* Phys. Rev. Lett. , 1987, 58: 1494
- [8] Adam T *et al.* <http://arxiv.org/abs/1109.4897>
- [9] Wang K L, Cao Z X. arXiv: 1201.1341v1 (2012)
- [10] Goldhaber A S, Goldhaber M. Physics Today, 2011, (5): 40
- [11] Goldhaber M, Grodzins L, Sunyar A W. Phys. Rev. , 1958, 109: 1015
- [12] Yanagida T. Progress of Theoretical Physics, 1980, 64(3): 1103
- [13] Fukuda Y *et al.* Phys. Rev. Lett. , 1998, 81: 1562
- [14] Nieuwenhuizen Th M. Europhysics Letters, 2009, 86(5): 59001
- [15] Wang K L, Liu T, Feng M *et al.* Phys. Rev. A, 2010, 82: 064501